LA HIPÉRBOLA

CONTENIDO

Una ***hipérbola*** es la curva que se obtiene ***intersectando*** un ***cono*** y un ***plano***; si el ***plano*** está inclinado, corta ambas secciones del ***cono*** y no pasa por el ***vértice*** del mismo. Ver la ***Figura 1***.

Definición. Esta curva está definida como el ***lugar geométrico*** de todos los puntos contenidos en un plano, que tienen la propiedad común relativa de que **la *diferencia* de sus distancias a dos puntos fijos llamados *focos* es una *constante***, que representaremos por **2a**.

De la ***Figura 2***, se puede ver que los puntos ***M***, ***F_1*** y ***F_2*** son los ***vértices*** de un triángulo y como en todo triángulo la diferencia entre dos de sus lados es menor que el tercero, entonces:

$$\overline{MF_1} - \overline{MF_2} < \overline{F_1F_2}$$

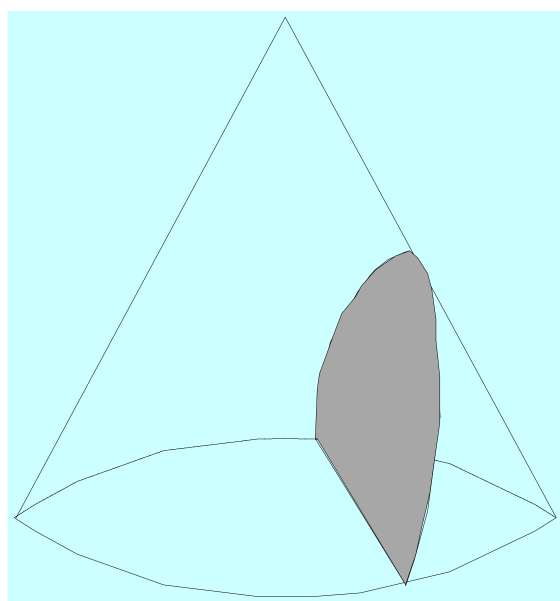

Figura 1

Y dada la definición se puede escribir que:

$$\overline{MF_1} - \overline{MF_2} = 2a$$

Y que la ***distancia focal*** es: $\overline{F_1F_2} = 2c$.

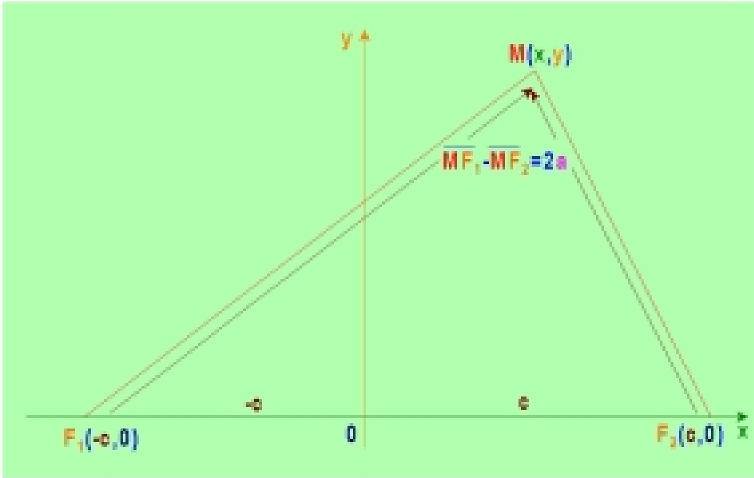

Figura 2

1. Ecuación de la *hipérbola horizontal* con centro en el origen.

Para este tipo de curva las coordenadas de los ***focos*** son: ***F₁(-c,0)*** y ***F₂(c,0)***.

La condición de movimiento del punto ***M(x, y)*** según definición es:

$$\overline{MF_1} - \overline{MF_2} = \text{Constante} = 2a \quad \text{......(1)}$$

Pero de acuerdo a la expresión para la distancia entre dos puntos tenemos:

$$\overline{MF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + (y+0)^2} \quad y \quad \overline{MF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + (y+0)^2}$$

Sustituyendo en **(1)**, tenemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y+0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y+0)^2} = \mathbf{2a}$$

Despejando al primer radical:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividiendo entre **4**, elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$\left(c\,x - a^2\right)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Factorizando:

$$\mathbf{(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)} \quad \text{.......... (2)}$$

Para transformar más esta ecuación, tomaremos en cuenta, refiriéndonos al triángulo ***F_1MF_2*** de nuestra ***Figura 2***, que cada lado es ***mayor*** que la ***diferencia*** de los otros dos; esto nos permite escribir que:

$$\overline{F_1F_2} > \overline{MF_1} - \overline{MF_2}$$

Pero como $\overline{F_1F_2} = 2c$ y tomando en consideración la ecuación **(1)**, se tiene:

$$2c > 2a$$

Dividiendo entre dos y elevando al cuadrado.

$$c > a$$

$$c^2 > a^2$$

Por tanto:

$$\mathbf{c^2 - a^2 > 0}$$

Como la última desigualdad expresa que la ***diferencia*** **$c^2 - a^2$** es constante y positiva, podemos expresarla de la siguiente manera por otra constante **b^2**:

$$\mathbf{c^2 - a^2 = b^2}$$

Sustituyendo en la ecuación **(2)** queda:

$$\mathbf{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2} \quad \text{.......... (3)}$$

Que es la ecuación definitiva de la ***hipérbola***, la que también, al dividir entre **a^2b^2**, puede expresarse en la siguiente forma:

$$\frac{b^2\ x^2}{a^2\ b^2} - \frac{a^2\ y^2}{a^2\ b^2} = \frac{a^2\ b^2}{a^2\ b^2}$$

Simplificando:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{.......... (I)}$$

Ecuación llamada ***SIMÉTRICA***.

1.1. Análisis de la ecuación.

Previamente, necesitamos despejar a las dos variables, **x** y **y**, de la ecuación **(3)**.

Para **x** tenemos:

$$b^2x^2 = a^2b^2 + a^2y^2 = a^2(b^2 + y^2)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2)$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$\mathbf{x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Para **y** se tiene:

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 = b^2(x^2 - a^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$\mathbf{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Ahora haremos las siguientes consideraciones:

Primera La simple observación de las ecuaciones **(α)** y **(β)**, nos permite asegurar que la curva es ***simétrica*** con relación a los ejes del sistema y al origen.

Segunda Cuando **y=0**, en **(α)** resulta $\mathbf{x = \pm a}$. De acuerdo con esto vemos que la ***hipérbola*** corta al eje de las ***abscisas*** en los puntos ***$A_1(-a,0)$*** y ***$A_2(a,0)$***.

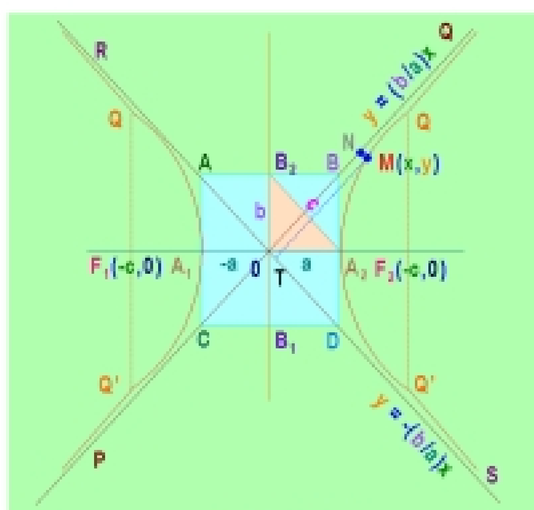

Figura 3

Cuando **x=0**, en **(β)** resulta $\mathbf{y = \pm bi}$. Este resultado nos permite asegurar que la curva no corta al eje de las ***ordenadas***.

Tercera La misma ecuación **(β)** nos hace comprender que la curva no existe entre **x=-a** y **x=a**, sino que solamente se extiende desde **x=-a** hacia la izquierda y desde **x=a**

hacia la derecha, o sea que tiene dos ramas separadas, ambas controladas por la misma ecuación. Se trata pues de una curva ***discontinua***.

Cuarta La curva es abierta porque a medida que **x** aumenta independientemente, también **y** hace lo propio.

En conclusión, la ***hipérbola*** tiene la forma aproximada que se muestra en la ***Figura 3***.

Esta es una ***hipérbola horizontal*** con ***centro*** en el ***origen***, cuyos elementos principales son:

A_1 y A_2,	sus ***vértices***.
F_1 y F_2,	sus ***focos***.
$\overline{CD}$ y $\overline{DE}$,	sus ***lados***.
$\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$,	sus ***asíntotas***.
$\overline{A_1A_2}=2a$,	su ***eje transverso*** o ***focal***.
$\overline{B_1B_2}=2b$,	su ***eje conjugado*** o ***no focal***.
$\overline{F_1F_2}=2c$,	su ***distancia focal***

El ***lado recto*** (**L.R.**) es el segmento de recta $\overline{QQ'}$, cuyos extremos son puntos de la curva, perpendicular al eje ***focal*** y que pasa por uno de los ***focos***, cuya ecuación es.

$$L.R.=\frac{2b^2}{a}$$

La ***excentricidad*** se define también como $e=\frac{c}{a}$.

Pero como en la ***hipérbola*** $c>a$, entonces $e>1$.

De los ejes mencionados, pueden ser indistintamente uno ***mayor*** que otro o hasta ***iguales***, sin que la ***hipérbola*** deje de ser ***horizontal***. De las magnitudes de ellos, solamente depende la ***mayor*** o ***menor*** abertura de las ramas de la curva.

Quinta Demostraremos ahora que las ramas de la ***hipérbola*** se acercan indefinidamente a las ***asíntotas***, sin que jamás lleguen a tocarlas.

Para esto, basta hacer ver que, para todo punto de la ***hipérbola***, el producto de sus distancias a las ***asíntotas*** es ***constante***, lo que representaremos con la letra **q**.

Entonces, de acuerdo con la ***Figura 3*** tenemos:

$$\overline{MN}\ \overline{TM}=\text{Constante}=q \qquad \text{...(4)}$$

Aplicando la expresión para la distancia entre una recta y un punto dado, tendremos (el signo **-** negativo, para la primera expresión es porque el punto está abajo de la recta):

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

$$\overline{MN} = -\left(\frac{y - \frac{bx}{a}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}\right) = \frac{\frac{bx - ay}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}} = \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\overline{TM} = \frac{y + \frac{bx}{a}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{\frac{ay + bx}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}} = \frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Sustituyendo en **(4)**:

$$\overline{MN}\ \overline{TM} = \left(\frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\left(\frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2 + b^2}$$

De acuerdo con la ecuación de la ***hipérbola***, expresión **(3)**:

Tenemos que:

$$\boxed{\overline{MN}\ \overline{TM} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \text{constante} = q}$$

Quedando demostrado que las ramas de la ***hipérbola*** nunca tocan a las ***asíntotas***.

2. *Asíntotas* de la hipérbola

Para encontrar sus ecuaciones , partimos de la ecuación ya conocida, es decir:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Despejando a **y**, tenemos:

$$\frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2b^2} = 1$$

Multiplicando por $\mathbf{a^2b^2}$:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, que es la ecuación **(3)** ya vista

$$b^2x^2 - a^2b^2 = a^2y^2$$

$$\frac{b^2\left(x^2 - a^2\right)}{a^2} = y^2$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros:

$$y=\pm\sqrt{\frac{b^2\left(x^2-a^2\right)}{a^2}}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

Consideramos que la rama derecha de la ***hipérbola*** se prolonga indefinidamente, cuando **x** crece indefinidamente también, se tiene que el cociente $\frac{a^2}{x^2}$ tiende a ***cero***, por lo que, el subradical tiende a tomar el valor de la unidad. De esta manera la expresión anterior toma la forma.

$$\mathbf{y=\pm\frac{b}{a}x} \quad \text{...} \mathbf{(II)}$$

Que es la ecuación de las ***asíntotas*** de la ***hipérbola***. Estas ecuaciones pueden presentarse en la siguiente forma:

$$y=\frac{b}{a}x$$
$$ay=bx$$
$$0=bx-ay$$

Dividiendo entre **ab** se tiene:

$$\frac{0}{ab}=\frac{bx}{ab}-\frac{ay}{ab}$$
$$\mathbf{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0} \quad \text{...} \mathbf{(1)}$$

De la misma manera la otra ecuación:

$$y=-\frac{b}{a}x$$
$$ay=-bx$$
$$ay+bx=0$$

Dividiendo entre **ab** tenemos:

$$\frac{ay}{ab}+\frac{bx}{ab}=\frac{0}{ab}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \quad \text{...}(2)$$

De acuerdo con esto, y la ecuación ***simétrica*** **(I)** de la ***hipérbola***:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Observamos que su primer miembro es la diferencia de dos cuadrados y que se puede expresar, como el ***producto*** de ***binomios conjugados*** y si igualamos a cero, tendremos así las ecuaciones de las ***asíntotas***, en este caso la ***hipérbola horizontal***, es decir.

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$$

Este procedimiento, será aplicable para las demás posiciones de la ***hipérbola***.

Ejemplo 1. **Determinar a**, **b**, **c**, **L.R.**, **e** y **hacer** la gráfica de la ***hipérbola***, cuya ecuación es: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{100}=1$.

SOLUCIÓN

La ecuación dada corresponde a la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, por lo que:

$a^2 = 64$. Por tanto: $a = 8$

$b^2 = 100$. Por tanto: $b = 10$

Como en la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que:

$c^2 = 64 + 100 = 164.$

Por lo tanto:

$$c=\sqrt{164}=2\sqrt{41}=2(6.40)=12.8$$

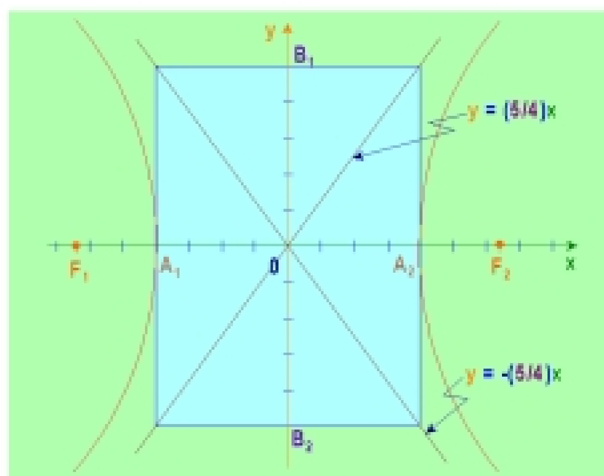

Figura 4

De esto, se obtiene:

Los ***focos***: $F_1(-2\sqrt{41},0)$ y $F_2(2\sqrt{41},0)$

Los ***vértices***: $A_1(-8,0)$ y $A_2(8,0)$

El ***ancho focal***: $L.R.=\frac{2(100)}{8}=25$

La ***excentricidad***: $e=\frac{2\sqrt{41}}{8}=\frac{\sqrt{41}}{4}$

Las ecuaciones de las ***asíntotas***: $y=\frac{b}{a}x \;;\; y=-\frac{b}{a}x$

En las cuales, sustituyendo los valores de **a** y **b**, tenemos:

$$y = \pm \frac{5}{4} x$$

Con estos datos se procede a hacer la gráfica, mostrada en la ***Figura 4***.

3. Ecuación de la *hipérbola vertical* con centro en el origen.

Cuando una ***hipérbola*** es de este tipo, sus ***focos*** son ***F_1(0.-c)*** y ***F_2(0,c)*** y están sobre el eje de las **y**, como se puede ver en la ***Figura 5***.

Obtendremos su ecuación procediendo igualmente que otros casos ya vistos, es decir, representamos mediante una ecuación la condición de movimiento que deben satisfacer todos los puntos de la curva según su definición.

Sea ***M(x, y)*** un punto cualquiera su condición de movimiento es:

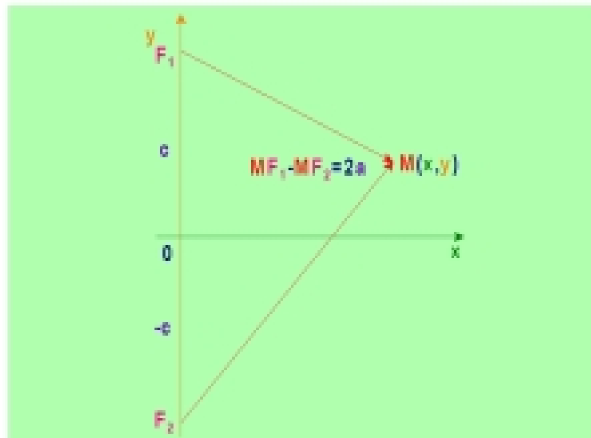

Figura 5

$$\overline{MF_1} - \overline{MF_2} = 2a \quad \text{...} \quad (1)$$

Pero:

$$\overline{MF_1} = \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \quad ; \quad \overline{MF_2} = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Sustituyendo en la ecuación **(1)** se tiene:

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a$$

Despejando el primer radical:

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Elevando al cuadrado, simplificando términos semejantes y dividiendo entre 4:

$$cy - a^2 = a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Elevando al cuadrado de nuevo:

$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

Factorizando:

$$(c^2 - a^2)y^2 - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Pero según la ***Figura 3*** y aplicando el teorema de **Pitágoras** se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Sustituyendo, obtenemos la ecuación:

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

Dividiendo entre $\mathbf{a^2 b^2}$, se tiene la forma simétrica de la ecuación de la hipérbola de este tipo:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(III)}$$

La curva tiene la forma aproximada de la ***Figura 6***.

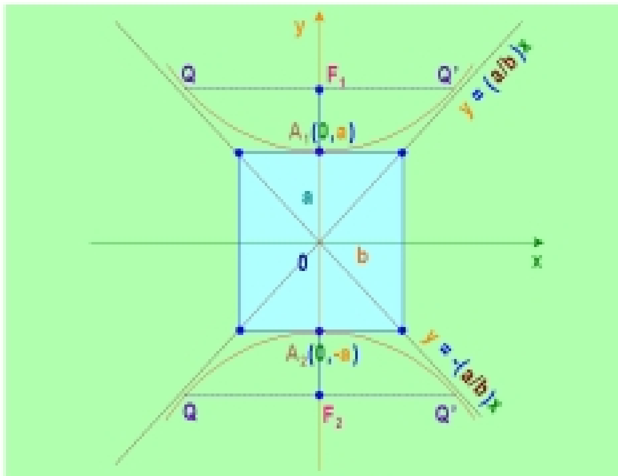

Figura 6

En este caso el ***eje focal*** o ***transverso*** coincide con el eje **y** y el ***eje conjugado*** con el eje **x**. Las ecuaciones de las ***asíntotas*** son: $\mathbf{y = \frac{a}{b}x}$ y $\mathbf{y = -\frac{a}{b}x}$.

Las ecuaciones obtenidas son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(I)}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(III)}$$

Muestran que la curva es ***simétrica*** con respecto al eje coordenado y al origen.

En cada hipérbola ***a***, ***b*** y ***c*** están ligados por la relación

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Se especifico que para la elipse, el valor absoluto de los denominadores $\mathbf{a^2}$ y $\mathbf{b^2}$ nos indican donde están los ***focos***, si sobre el eje de las **x** o sobre el eje de las **y**. En el caso de la ***hipérbola*** este concepto no es aplicable, ya que en dicha curva se puede tener indistintamente que:

a > b; a < b o **a = b**

En la ***hipérbola*** según sus ecuaciones podemos observar, que la colocación de los denominadores $\mathbf{a^2}$ y $\mathbf{b^2}$ no cambia, los que cambian son las variables cuadráticas $\mathbf{x^2}$ o $\mathbf{y^2}$.

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Si el eje ***focal*** es ***paralelo*** al eje de las **x** entonces x^2 y su divisor están precedidos del signo positivo **(+).**

Si el eje ***focal*** es ***paralelo*** al eje de las **y**, entonces y^2 y su divisor están precedidos por el signo positivo **(+)**.

La característica que distingue a la ***hipérbola*** de las curvas, ***circunferencia***, ***parábola*** y ***elipse*** es que el producto **(A) (C) < 0**, por lo cual la grafica es una ***hipérbola*** o un par de ***rectas*** que se ***intersectan***.

EJEMPLO 2. **Determinar** la ***excentricidad***, el ***lado recto*** y las ecuaciones de las ***asíntotas*** de la ***hipérbola*** cuya ecuación es: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$.

SOLUCIÓN

Multiplicando por **(-1)** ambos miembros de la ecuación dada:

$$-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

Se observa que:

$$a^2 = 4. \text{ Por tanto : } \mathbf{a = 2}$$

$$b^2 = 5. \text{ Por tanto : } \mathbf{b = \sqrt{5}}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, sustituyendo valores:

$$c^2 = 4 + 5 = 9. \text{ Por tanto : } \mathbf{c = 3}$$

La ***excentricidad*** y el ***lado recto*** están dadas por:

$$\mathbf{e} = \frac{c}{a} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{L.R.} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = \mathbf{5}$$

Las ecuaciones de las ***asíntotas*** son:

$$y = \frac{a}{b}x = \frac{2}{\sqrt{5}}x \quad ; \quad y = -\frac{a}{b}x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x$$

4. Hipérbolas conjugadas *equiláteras* o *rectangulares* con centro en el origen.

Estas ***hipérbolas*** se producen cuando los lados son iguales, es decir, cuando los dos semi-ejes tienen la misma magnitud (**a=b**) y consecuentemente las ***asíntotas*** se cortan en ángulo recto. Las ecuaciones respectivas son:

Hipérbola horizontal: Su ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si **a = b** se tiene.

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Multiplicando por $\mathbf{a^2}$:

$\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$ .... **(IV)**

Hipérbola vertical: Su ecuación es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Como **a = b**; tenemos:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Multiplicando por $\mathbf{a^2}$:

$\mathbf{y^2 - x^2 = a^2}$ .... **(V)**

5. Ecuación de la *hipérbola horizontal* con centro fuera del origen.

Sea ***C(h, k)*** el centro de una ***hipérbola*** cuyo eje ***transverso*** es ***paralelo*** al eje **x**, ver ***Figura 7***.

Tracemos otro sistema de coordenadas **x'y'**, cuyo origen coincida con ***C(h, k)***. La ecuación de la ***hipérbola*** con respecto a este nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

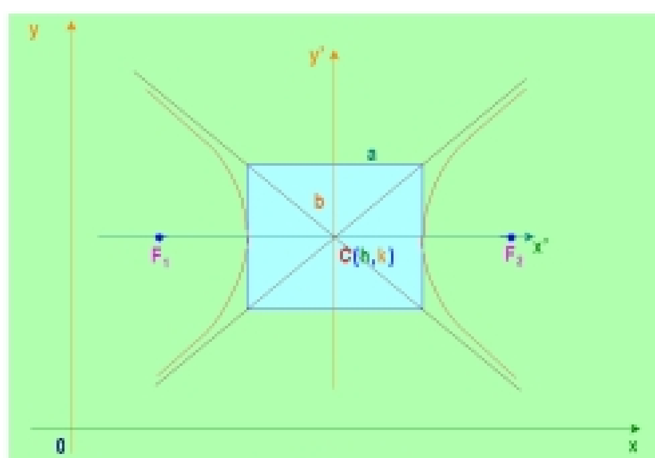

Figura 7

Refiriéndola al sistema de coordenadas original, tendremos que recurrir a las ecuaciones de translación paralela de ejes. Estas expresiones son:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

Haciendo la sustitución, tenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(VI)}$$

Que es la ecuación de la ***hipérbola*** ***horizontal*** con ***centro*** fuera del ***origen***.

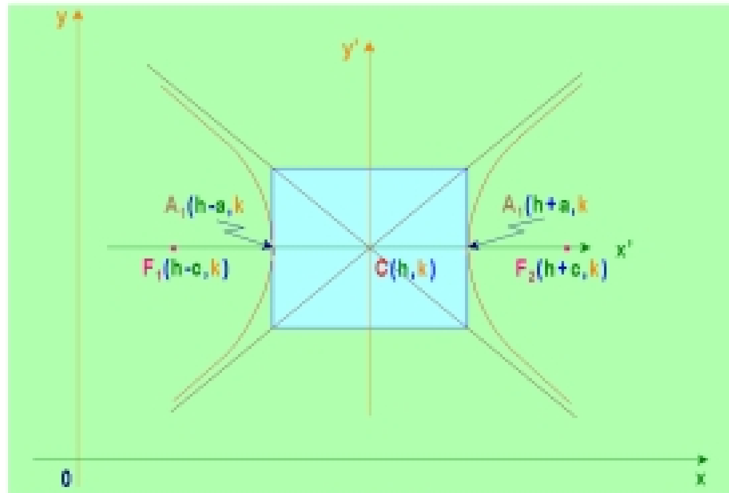

Figura 8

Las coordenadas de los ***vértices*** A_1 y A_2 se obtienen a partir del ***centro***, así como los extremos de los ejes, después de haber determinado los valores **a**, **b** y **c**. Ver la ***Figura 8***.

Las ecuaciones de las ***asíntotas*** son:

$$(y-k) = \frac{b}{a}(x-h)$$
$$(y-k) = -\frac{b}{a}(x-h)$$

EJEMPLO 3. **Determinar** las coordenadas del ***centro***, ***vértices***, ***focos***, ecuaciones de las ***asíntotas***, ***lado recto*** (**L.R**) y ***excentricidad*** de la ***hipérbola*** cuya ecuación es:

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

SOLUCIÓN

La forma de la ecuación es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Por comparación se tiene:

h = 5, k = -3

Por tanto las coordenadas del ***centro*** son: ***C(5,-3)***.

a^2 = 9. Por tanto: **a = 3**
b^2 = 16. Por tanto: **b = 4**

Entonces según la expresión:

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$. Por tanto: $c = 5$

$$\textbf{Excentricidad} = e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

$$\textbf{L.R.} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{3} = \frac{32}{3}$$

Las ecuaciones de las ***asíntotas*** son:

$$y + 3 = \frac{4}{3}(x - 5)$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} - 3 = \frac{4}{3}x - \frac{29}{3} \quad \therefore \quad \mathbf{y = \frac{4}{3}x - \frac{29}{3}}$$

$$y + 3 = -\frac{4}{3}(x - 5)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} - 3 = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \quad \therefore \quad \mathbf{y = \frac{-4}{3}x + \frac{11}{3}}$$

6. Ecuación de la *hipérbola vertical* con centro fuera del origen.

En base a la ***Figura 9***, se observa que un proceso similar al caso anterior establece que la ecuación correspondiente es:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

Pero sabemos que:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

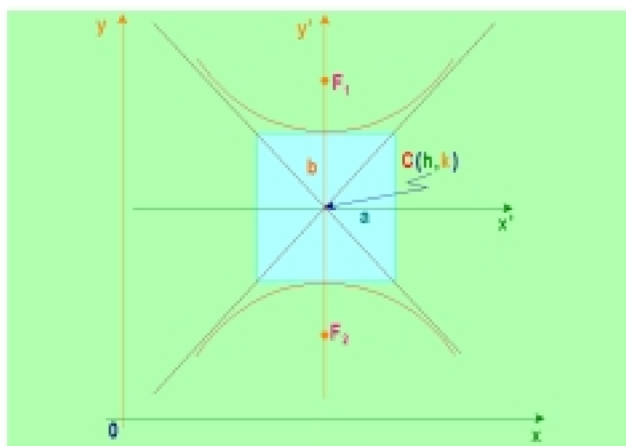

Figura 9

Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{.......................... (VII)}$$

Que es la ecuación representativa de la ***hipérbola*** ***vertical*** con ***centro*** fuera del ***origen***.

7. Forma general de la ecuación de la *hipérbola horizontal* y *vertical* con centro fuera del origen.

Desarrollando la forma común de las ecuaciones de la ***hipérbola***.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad y \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Procediendo igualmente que en los casos de la ***parábola*** y la ***elipse*** cualquiera de estas dos últimas ecuaciones puede expresarse en la siguiente forma general de la ***hipérbola*** suprimiendo los denominadores, desarrollando los binomios, reduciendo términos semejantes y ordenando la ecuación.

Es decir que se obtiene la ***forma general*** de la ecuación de la ***hipérbola*** en la cual su eje es ***paralelo*** a cualesquiera de los ejes coordenados:

$$\mathbf{A\,x^2+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0}$$ .... **(VIII)**

Que en el caso respectivo, se reconocerá como representativa de la ***hipérbola***, porque los coeficientes de x^2 y y^2 deben tener signos contrarios. Si la ***hipérbola*** es ***horizontal*** el coeficiente de x^2 es ***positivo*** y si la ***hipérbola*** es ***vertical*** el coeficiente de y^2 es el ***positivo***.

8. Ecuaciones de la *hipérbola equilátera* referida a sus propias asíntotas.

De acuerdo a la ***Figura 10***, las ***asíntotas*** están como ejes de coordenadas y sabemos que:

$$\mathbf{\overline{MN}\ \overline{QM}=constante=q}$$

Pero:

$$\overline{MN}=x$$
$$\overline{QM}=y$$

Sustituyendo:

$$\mathbf{x\,y=q}$$ **(IX)**

Figura 10

Cuando la constante **q** es ***positiva***, las ramas de la curva están contenidas en el ***primer*** y ***tercer*** cuadrantes; cuando es ***negativa*** se encuentra en el ***segundo*** y ***cuarto*** cuadrantes.

Para el caso de la ***hipérbola equilátera*** cuyas ***asíntotas*** son ***paralelas*** a los ejes de coordenadas y de acuerdo a la ***Figura 11***.

La ecuación es:

$$\mathbf{(x-h)(y-k)=q}$$ .... **(X)**

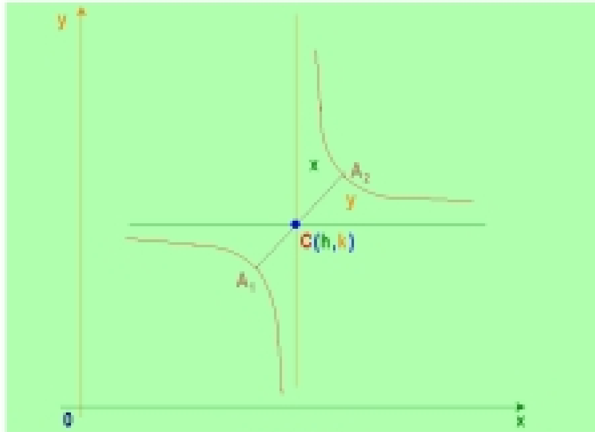

Figura 11

9. Posición general de la *hipérbola* y su ecuación.

De la ***Figura 12*** se tiene:

$$\frac{\dfrac{(y-m_2x-b_2)^2}{1+m_2^2}}{a^2}-\frac{\dfrac{(y-m_1x-b_1)^2}{1+m_1^2}}{b^2}=1 \quad \text{.......... (XI)}$$

Esta ecuación también puede expresarse en la siguiente forma general:

$$A\,x^2+B\,x\,y+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

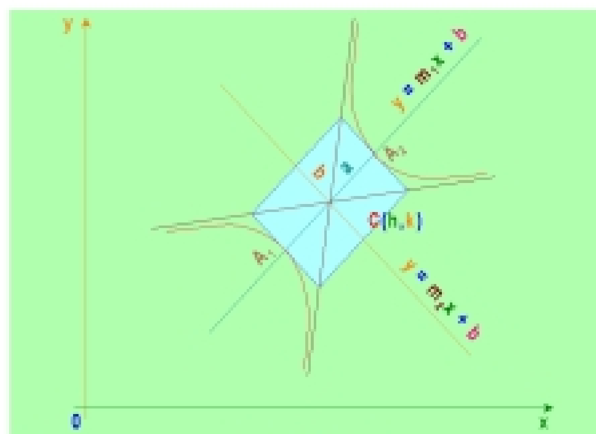

Figura 12

10. Ejercicios

1. **Determínense** las ecuaciones de las ***hipérbolas*** cuyo ***centro*** es el punto ***C(2,-1)*** y cuyos ***semi-ejes paralelos*** a **0x** y **0y** miden **1** y **4**, respectivamente.

SOLUCIÓN

La ecuación de la ***hipérbola horizontal*** es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Sustituyendo valores:

$$\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

La ecuación de la ***hipérbola vertical*** es de la forma: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$. Sustituyendo valores:

$$\frac{(y+1)^2}{1}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$$

2. **Obténgase** la ecuación de la ***hipérbola*** cuyo ***centro*** es el punto ***C(-2,1)***, tiene sus ejes ***paralelos*** a los de coordenadas y pasa por los puntos ***P(0,2)*** y ***Q(1,-4)***.

SOLUCIÓN

Suponiendo que la ***hipérbola*** es ***horizontal***, su ecuación es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Sustituyendo las coordenadas del ***centro C***; nos queda:

$$\frac{(x+2)^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$$

Las coordenadas de los puntos ***P*** y ***Q*** deben verificarla.

Para el punto ***P***:

$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \quad \text{.......} \quad (1)$$

Para el punto ***Q***:

$$\frac{9}{a^2}-\frac{25}{b^2}=1 \quad \text{.......} \quad (2)$$

Multiplicando **(1)** por **25**:

$$\frac{100}{a^2}-\frac{25}{b^2}=25 \quad \text{.......} \quad (3)$$

Restando la ecuación **(2)** de la **(3)**:

$$\frac{91}{a^2}=24. \text{ Por tanto : } a^2=\frac{91}{24}$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$\frac{4}{\frac{91}{24}}-\frac{1}{b^2}=1$$

$$\frac{96}{91}-\frac{91}{91}=\frac{1}{b^2}$$

$$\frac{5}{91}=\frac{1}{b^2}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Despejando a b^2:

$$b^2 = \frac{91}{5}$$

Finalmente, la ecuación de la ***hipérbola*** es:

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{91}{24}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{91}{5}} = 1$$

3. **Determínense** los elementos de la ***hipérbola*** $x^2 - y^2 + 4x - 4y + 16 = 0$ y **hallar** los puntos donde corta a la ***hipérbola*** $x^2 - y^2 + 3x - y + 8 = 0$.

SOLUCIÓN

Completando a trinomios cuadrados perfectos y factorizando la primera ecuación:

$$(x^2 + 4x + 4 - 4) - (y^2 + 4y + 4 - 4) + 16 = 0$$
$$(x+2)^2 - (y^2+2)^2 = -16$$
$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$

De la ecuación se observa que a^2**=16** y b^2**=16**. Por tanto: **a = 4** y **b = 4**. La ecuación representa a una hipérbola equilátera vertical con ***centro*** en ***C(-2,-2)***.

Semi ejes transverso y conjugado = 4

De la expresión: $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 - a^2 = b^2$. Despejando a **c** se tiene:

$$c = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm\sqrt{16 \bullet 2} = \pm 4\sqrt{2} = \pm \mathbf{5.66}$$

Por lo que:

Distancia focal = 2 c = 11.32
Vértices: $A_1(-2,-6)$, $A_2(-2,2)$
Focos : $F_1(-2,-7.66)$, $F_2(-2,3.66)$

Para las ecuaciones de las ***asíntotas***:

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{16} = 0$$

Extrayendo raíz cuadrada.

$$\sqrt{(y+2)^2} = \pm\sqrt{(x+2)^2}$$

$$(y+2) = \pm(x+2)$$

$$y+2 = x+2.\ \text{ Por tanto :}\ \ \mathbf{y=x}$$

$$y+2 = -x-2.\ \text{ Por tanto :}\ \ \mathbf{y=-x-4}$$

Ahora para las ***intersecciones*** de las dos ***hipérbolas***, hacemos simultáneas sus ecuaciones:

$$\mathbf{x^2 - y^2 + 4x - 4y + 16 = 0} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{x^2 - y^2 + 3x - y + 8 = 0} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Restando al ecuación **(2)** de la **(1)**, se tiene:

$$x - 3y + 8 = 0$$

Despejando a **x**:

$$\mathbf{x = 3y - 8} \quad \dots\dots\dots (3)$$

Sustituyendo **(3)** en **(2)** y reduciendo términos semejantes:

$$(3y-8)^2 - y^2 + 3(3y-8) - y + 8 = 0$$

$$y^2 - 48y + 64 - y^2 + 9y - 24 - y + 8 = 0$$

$$8y^2 - 40y + 48 = 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Por solución rápida las raíces son:

$$\mathbf{y_1 = 2 \quad , \quad y_2 = 3}$$

Sustituyendo en la ecuación **(3)**:

$$\mathbf{x_1} = 6 - 8 = \mathbf{-2}$$

$$\mathbf{x_2} = 9 - 8 = \mathbf{1}$$

Los puntos de ***intersección*** son:

$$\mathbf{P(-2,2) \quad , \quad Q(1,3)}$$

4. **Demuéstrese** que $\mathbf{xy = 2x - 3y}$ es la ecuación de una ***hipérbola equilátera*** y **determinar** su ***centro***, sus ***ejes*** y sus ***asíntotas***.

SOLUCIÓN

Necesitamos llevarla a la forma: $\mathbf{(x-h)(y-k) = q}$; y para lograrlo lo más conveniente es determinar los parámetros **h**, **k** y **q**, por comparación de la ecuación dada en la forma tipo

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

desarrollada, o sea:

$$x\,y - k\,x - h\,y + h\,k - q = 0$$
$$x\,y - 2\,x + 3\,y + 0 = 0$$

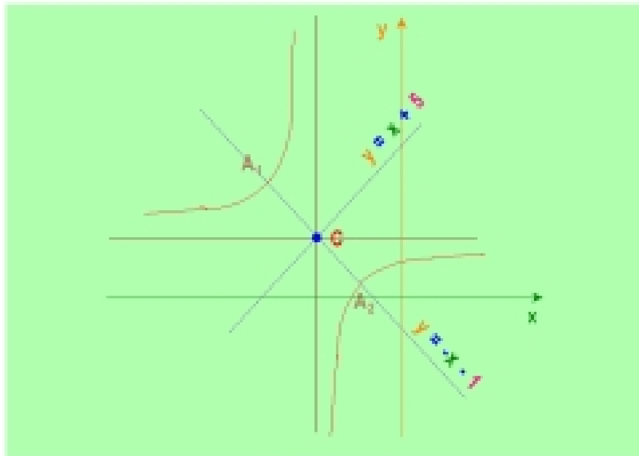

Figura 13

Por comparación, se encuentra que:

$$k = 2 \quad , \quad h = -3 \quad , \quad h\,k - q = 0$$

Sustituyendo los valores de **h** y **k** para obtener el valor de **q**, se obtiene:

$$(2)\,(-3) - q = 0$$
$$-6 - q = 0 \text{. Por tanto : } \mathbf{q = -6}$$

La ecuación será:

$$\mathbf{(\,x + 3\,)\,(\,y - 2\,) = -6}$$

Centro **:** $\mathbf{C\,(-3\,,2\,)}$

Ecuación del eje transverso : $y - 2 = -\,(\,x + 3\,)$. Por tanto : $\mathbf{y = -\,x - 1}$

Ecuación del eje conjugado : $y - 2 = (\,x + 3\,)$. Por tanto : $\mathbf{y = x + 5}$

Ecuaciones de las asíntotas : $y = 2 \quad , \quad \mathbf{x = -3}$

La ***Figura 13*** muestra gráficamente los resultados obtenidos.

5. **Determínese** la ecuación de la ***hipérbola*** que pasa por el punto ***P(3,4)*** y cuyas ***asíntotas*** son las rectas: $\mathbf{y = x - 1 \quad , \quad x = 2}$.

SOLUCIÓN

Sabemos que:

$\mathbf{\overline{QM}\,\overline{RM} = constante = q}$ ....**(1)**

La distancia de un punto a una recta está dada por: $\mathbf{d = \dfrac{y_1 - m\,x_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}}}$, entonces:

$$\overline{QM} = \frac{y - x + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{RM} = \frac{-x + 2}{\sqrt{1}} = -x + 2 = x - 2$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$\left(\frac{y-x+1}{\sqrt{2}}\right)(x-2)=q$$

Las coordenadas del punto **P** deben satisfacer esta ecuación.

$$\left(\frac{4-3+1}{\sqrt{2}}\right)(3-2)=q \quad \therefore \quad \mathbf{q=\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

La ecuación es:

$$\left(\frac{y-x+1}{\sqrt{2}}\right)(x-2)=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Quitando denominadores y desarrollando:

$$(y-x+1)\ (x-2)=2$$
$$x\,y-x^2+x-2\,y+2\,x-2-2=0$$

Simplificando:

$$\mathbf{x^2-x\,y-3\,x+2\,y+4=0}$$

La ***Figura 14*** muestra gráficamente los resultados obtenidos:

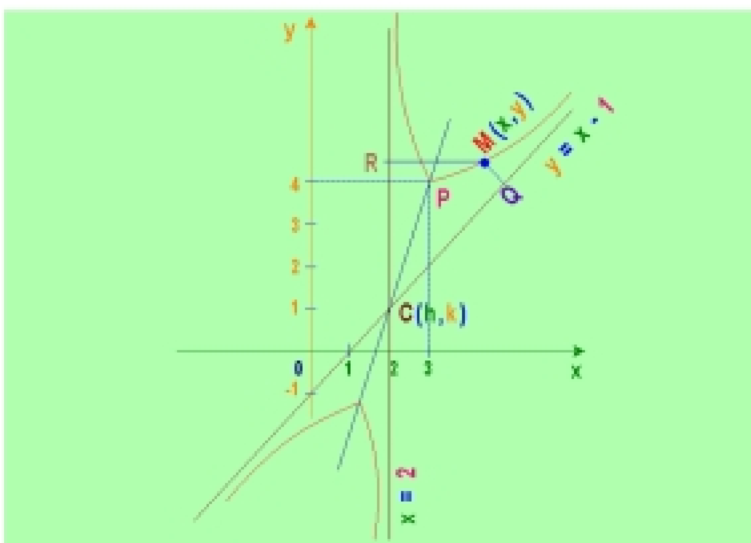

Figura 14

Nombre de archivo:	hiperbola	
Directorio:	C:\Geometria_analitica	
Plantilla:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Plantillas\Normal.dot	
Título:	LA HIPÉRBOLA	
Asunto:		
Autor:	Pablo Fuentes Ramos	
Palabras clave:		
Comentarios:		
Fecha de creación:	15/03/02 09:25 A.M.	
Cambio número:	45	
Guardado el:	05/06/02 12:51 P.M.	
Guardado por:	Pablo Fuentes Ramos	
Tiempo de edición:	1,766 minutos	
Impreso el:	05/06/02 07:05 P.M.	
Última impresión completa		
	Número de páginas:	21
	Número de palabras:	2,838 (aprox.)
	Número de caracteres:	16,178 (aprox.)